CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 19.02.2017
Filiera teoretică: profil umanist
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII-a

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Arătaţi că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = aA$;

b) Calculaţi $\left(A - A^t\right)^{2017}$.

Soluție:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 1p

$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2a \\ a & a \end{pmatrix}$ 1p

$a = 3$ 1p

b) $A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{not}{=} C$ 1p

$C^4 = I_2$ 1p

$\left(A - A^t\right)^{2017} = C^{2017} = \left(C^4\right)^{504} \cdot C = I_2^{504} \cdot C = I_2 \cdot C = C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 2p

2. Fie matricea $B(x) = \begin{pmatrix} x+3 & x^2-9 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $B^2(x) = 2xB(x)$;

b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $B^2(x) + B^2(-x) = (x^3 + 3x)I_2$.

Soluție:

1. a) $B^2(x) = \begin{pmatrix} 2x^2+6x & 2x^3-18x \\ 2x & 2x^2-6x \end{pmatrix} = 2xB(x)$ 2p

$2xB(x)$, deci $B^2(x) = 2xB(x)$ 1p

b) $B^2(x) + B^2(-x) = \begin{pmatrix} 2x^2+6x & 2x^3-18x \\ 2x & 2x^2-6x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x^2-6x & -2x^3+18x \\ -2x & 2x^2+6x \end{pmatrix}$ 1p

$$B^2(x)+B^2(-x)=\begin{pmatrix} 4x^2 & 0 \\ 0 & 4x^2 \end{pmatrix}$$ 1p

$$\left(x^3+3x\right)I_2=\begin{pmatrix} x^3+3x & 0 \\ 0 & x^3+3x \end{pmatrix}$$ 1p

$x^3-4x^2+3x=0 \qquad x(x^2-4x+3)=0$ 1p

$x\in\{0;1;3\}$ 1p

3. Fie mulţimea $G=\left\{M(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a\in R\right\}$.

a) Arătaţi că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b), \forall\, a,b\in R.$

b) Arătaţi că $\forall M(a)\in G, \exists M(c)\in G$ astfel încât $M(a)\cdot M(c)=I_3$.

c) Să se calculeze $\underbrace{M(-2)\cdot M(-2)\cdot ...M(-2)}_{de\, 2017\, ori}$.

Soluție:

a) Demostrează că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b), \forall\, a,b\in R.$ 2p

b) $c=-a \Rightarrow \exists\, M(c)=M(-a)\in G$ cu proprietatea cerută. 2p

c) $\underbrace{M(-2)\cdot M(-2)\cdot ...\cdot M(-2)}_{de\, 2017\, ori}=M(-4034)$ 3p

4. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $B=I_3-A$ și $C=I_3+aA$. Determinați $a\in R$ astfel

încât $B\cdot C=I_3$.

Soluție:

$B\cdot C=I_3 \Rightarrow \left(I_3+A\right)\cdot\left(I_3+aA\right)=I_3 \Leftrightarrow \left(a+1\right)A+aA^2=O_3$ 1p

$$\left(a+1\right)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}+a\begin{pmatrix} 14 & 42 & 28 \\ 42 & 126 & 84 \\ 28 & 84 & 56 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 2p

$$\begin{pmatrix} 15a+1 & 3(15a+1) & 2(15a+1) \\ 3(15a+1) & 9(15a+1) & 6(15a+1) \\ 2(15a+1) & 6(15a+1) & 4(15a+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 3p

$15a+1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{15}$ 1p